トーリック多様体の交叉コホモロジー

小田, 忠雄

代数幾何学シンポジウム記録
1990年度 pp.148-161

トーリック多様体の交叉コホモロジー

東北大理 小田忠雄

トーリック多様体が与えられたとき，その交叉コホモロジーを，扇を使って組合せ論的に記述すべく石田正典，朴恵淑両氏と共同研究中であり，本稿はその中間報告である．簡単のため，複素数体 $\mathbf{C}$ 上の有限型のトーリック多様体に話題を限定する．

階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群 N によって決る**代数的トーラス**を $T_N := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^* \cong (\mathbf{C}^*)^r$ としたとき，$\mathbf{C}$ 上の**トーリック多様体**とは，$\mathbf{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，T_N が代数的に作用し，しかも T_N 自身を開軌道として含むものである．一般論 ([26] 参照) によれば，$X = T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ と組合せ論的に記述できる．ここに Δ は N に関する**扇**と呼ばれるものであり，$N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ 内の**有理強凸多面錐**の有限集合であって，$\sigma \in \Delta$ なら σ のすべての面も Δ に含まれ，また $\sigma, \sigma' \in \Delta$ なら共通集合 $\sigma \cap \sigma'$ は σ および σ' の面であるようなものである．

一般にこのような X は特異点を持ち，X が非特異であるか否かを Δ の言葉で記述できる．例えば，Δ が**単体的**であることと，X が**高々商特異点**しか持たないこととは同値である．一方，代数多様体 X から自然に得られる複素解析空間 $\mathcal{X} := X^{\mathrm{an}}$ がコンパクトであることと Δ が**完備**であること，すなわち Δ の台 $|\Delta| := \cup_{\sigma\in\Delta}\,\sigma$ が $N_{\mathbf{R}}$ に一致することとが同値である．X が**射影的**であるか，あるいはアフィンであるか否かも Δ の言葉で記述することができる．

解析空間 $\mathcal{X}$ のコホモロジー群 $H^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$, $H^{\cdot}_c(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ は，X が非特異，あるいは高々商特異点のみを持つ場合はともかく，一般には良いコホモロジーとは限らない．その代りに，Goresky-MacPherson によって導入され Deligne によって大幅に改良された (middle perversity に対応する) **交叉コホモロジー群** (Goresky-MacPherson[15], [17], [16], Deligne [11], Beilinson-Bernstein-Deligne [1], Borel et al. [4], Brylinski [6], Kirwan [24] 等参照)

$$IH^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C}) \qquad \text{および} \qquad IH^{\cdot}_c(\mathcal{X}, \mathbf{C})$$

を考察するのが適当である．X が高々商特異点しか持たない場合には通常のコホモロジー群に一致する．

我々の課題は次の通りである．

- $IH^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$, $IH^{\cdot}_c(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ を扇 Δ を使って組合せ論的に記述する．

- 交叉コホモロジー群の基本的性質を，トーリック多様体の場合に初等的に証明する．
- 特に，Xがアフィンまたは射影的トーリック多様体であるとき

$$l\text{が奇数なら}\qquad IH^l(\mathcal{X},\mathbf{C})=0$$

であることを初等的に証明する．現在既知の証明は，(i) 特異点解消および decomposition theorem を使うか，あるいは (ii) 有限体上の Weil 予想を使用する．Denef-Loeser [12], Fieseler [13] がその例である．(Joshua [22], [23] も参照.)

- 上記の課題が解決できれば，組合せ論への応用が期待できる．例えば，単体的凸多面体の面の個数に関する McMullen [25] の "g-予想" の必要性を証明する際に Stanley [33] が使用した射影的トーリック多様体での強 Lefschetz 定理が初等的に証明できることになる ([27], [28] 参照)．もっとも，この点に関しては，最近 Kalai が，より一般の球面の三角形分割の場合に代数幾何を使用しない証明を与えた由である．しかし，Stanley [34] によれば，単体的とは限らない凸多面体の頂点がすべて有理点であるとき，それに対応して自然に得られる射影的トーリック多様体の交叉コホモロジー群の次元が，その凸多面体の "h-vector" の定義としてふさわしいようであり，この方面での代数幾何学的視点の重要性が失われた訳ではない．尚，McMullen の予想の十分性は Billera-Lee [2], [3] によって別途示されたが，代数幾何とは無関係のようである．
- 青本-Gelfand 超幾何級数への応用も期待したい．

1 対数的二重複体

$N\cong\mathbf{Z}^r$に関する有限扇Δに対応する $\mathbf{C}$ 上のトーリック多様体を $X:=T_N\operatorname{emb}(\Delta)$ とする．補集合 $D:=X\setminus T_N$は Xの Weil 因子であるが Cartier 因子とは限らない．Nの双対 $\mathbf{Z}$ 加群を $M:=\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(N,\mathbf{Z})$ とし，双対双線形写像を $\langle\ ,\ \rangle: M\times N\to\mathbf{Z}$ とする．Mは代数的トーラス T_Nの指標群である．各 $m\in M$に対応する指標を $t^m:T_N\to\mathbf{C}^*$と書くこととし，Mの $\mathbf{C}$ 上の群環を $\mathbf{C}[M]:=\oplus_{m\in M}\mathbf{C}t^m$と同一視する．従って $T_N=\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[M])$ である．

各 $n\in N$に対して $\mathbf{C}[M]$ の $\mathbf{C}$ 上の微分δ_nが$\delta_n(t^m):=\langle m,n\rangle t^m$によって決まり，$T_N$のリー環への同型

$$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}}N\xrightarrow{\sim}\operatorname{Lie}(T_N),\qquad 1\otimes n\mapsto\delta_n$$

が得られ，更に $\mathcal{O}_X$同型 $\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbf{Z}}N\xrightarrow{\sim}\Theta_X(-\log D)$ が得られる．ただし，右辺は Weil 因子 Dに沿って対数的零を持つ接ベクトルの層である．その双対$\Omega^1_X(\log D)$ は Dに沿って対数的極を持つ 1 形式の層であり，$\mathcal{O}_X$同型

$$\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbf{Z}}M\xrightarrow{\sim}\Omega^1_X(\log D),\qquad 1\otimes m\mapsto dt^m/t^m$$

を得る．外積を取れば，$\mathcal{O}_X$同型 $\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbf{Z}}\bigwedge^{\cdot}M\xrightarrow{\sim}\Omega^{\cdot}_X(\log D)$ が成立する．右辺の外微分 d に対応する左辺の作用素は，p 形式 $t^m\otimes m_1\wedge\cdots\wedge m_p$を $(p+1)$ 形式 $t^m\otimes m\wedge m_1\wedge\cdots\wedge m_p$ に写す ([26, Chap. 3] 参照).

命題 1 T_Nからトーリック多様体Xへの開埋め込み写像をjとし，対応する解析空間の開埋め込みを$j^{\mathrm{an}}:(T_N)^{\mathrm{an}}\to X^{\mathrm{an}}$とすれば，

$$\mathbf{R}j_*^{\mathrm{an}}\mathbf{C}_{(T_N)^{\mathrm{an}}}=\left(\Omega_X^{\cdot}(\log D)\right)^{\mathrm{an}}\qquad(\text{擬同型})$$

であり，更に

$$H^{\cdot}((T_N)^{\mathrm{an}},\mathbf{C})=\mathbf{H}^{\cdot}(X,\Omega_X^{\cdot}(\log D))=\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}}\bigwedge^{\cdot}M$$

も成立する．ただし，$\mathbf{H}^{\cdot}(X,\Omega_X^{\cdot}(\log D))$ は$\mathcal{O}_X$加群の複体の超コホモロジー群である．

上記の擬同型は，非特異X上の正規交叉を持つ因子Dに関するDeligne [8, I, §3, §6] の結果のトーリック多様体への一般化である．Xがアフィンの場合に帰着して証明する．この擬同型により，命題後半の最左辺と真中の超コホモロジーとの同型がまず得られる．この超コホモロジーは代数的に定義されたものであるから，T_Nが代数的に作用する．従って，各指標$m\in M$に対する固有空間の直和に分解する．$m\neq 0$に対する成分が0であること，および$m=0$に対する成分が$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}}\bigwedge^{\cdot}M$であることが比較的容易に判る（後述の定理6および定理7の証明参照）．最左辺と最右辺との同型は既知の結果$H^{\cdot}((T_N)^{\mathrm{an}},\mathbf{Z})=\bigwedge^{\cdot}M$からも判る．

次に，命題1を$X=T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$の各$T_N$軌道に適用する．$X$の$T_N$軌道の集合と$\Delta$とが1対1に対応することが知られている．$\sigma\in\Delta$に対応する$T_N$軌道は

$$\mathrm{orb}(\sigma)=\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[M\cap\sigma^{\perp}])=T_{N/\mathbf{Z}(N\cap\sigma)}$$

である．軌道$\mathrm{orb}(\sigma)$のXにおける閉包を$V(\sigma)$とすると，$N/\mathbf{Z}(N\cap\sigma)$に関する適当な扇に対応したトーリック多様体となることも知られている．$D(\sigma):=V(\sigma)\setminus\mathrm{orb}(\sigma)$は$V(\sigma)$の上のWeil因子である．特に，$\{0\}\in\Delta$に対しては，$\mathrm{orb}(\{0\})=T_N$，$D(\{0\})=D$および$V(\{0\})=X$である．

各$0\leq q\leq r$に対して$\Delta(q):=\{\sigma\in\Delta\mid\dim\sigma=q\}$とする．整数$p,q$に対し

$$\mathcal{L}_X^{p,q}:=\bigoplus_{\sigma\in\Delta(q)}\Omega_{V(\sigma)}^{p-q}(\log D(\sigma))=\bigoplus_{\sigma\in\Delta(q)}\mathcal{O}_{V(\sigma)}\otimes_{\mathbf{Z}}\bigwedge^{p-q}(M\cap\sigma^{\perp})$$

とし，$d_{\mathrm{I}}:\mathcal{L}_X^{p,q}\to\mathcal{L}_X^{p+1,q}$を各$\sigma\in\Delta(q)$に対する外微分の直和とする．一方，$d_{\mathrm{II}}:\mathcal{L}_X^{p,q}\to\mathcal{L}_X^{p,q+1}$は次のように定義する．$\sigma\in\Delta(q)$, $\tau\in\Delta(q+1)$に対して，d_{II}の(σ,τ)成分は，まずσがτの面でないとき0とする．もしσがτの面であれば，ある原始元$n\in N$が$N\cap\mathbf{R}\sigma$を法として唯一つ決り，$\tau+(-\sigma)=\mathbf{R}_{\geq 0}n+\mathbf{R}\sigma$と表せる．ここで$\mathbf{R}\sigma=\sigma+(-\sigma)$は，$N_{\mathbf{R}}$において$\sigma$を含む最小の$\mathbf{R}$部分空間である．$M\cap\tau^{\perp}$は$M\cap\sigma^{\perp}$のcorank 1の部分$\mathbf{Z}$加群となる．このとき$d_{\mathrm{II}}$の$(\sigma,\tau)$成分は，制限写像$\mathcal{O}_{V(\sigma)}\to\mathcal{O}_{V(\tau)}$と$n$による内部積とのテンソル積である．すなわち，$\mathcal{L}_X^{p,q}$の$\sigma$成分の

$$t^m\otimes m_1\wedge m_2\wedge\cdots\wedge m_{p-q},\qquad m\in M\cap\sigma^{\perp},\quad m_1\in M\cap\sigma^{\perp},\quad m_2,\ldots,m_{p-q}\in M\cap\tau^{\perp}$$

の形をした元は，もし$m\notin M\cap\tau^{\perp}$なら0に写り，さもなければ，

$$t^m\otimes\langle m_1,n\rangle m_2\wedge\cdots\wedge m_{p-q}$$

に写る. d_{II}は実は **Poincaré** の**留数写像**である.

$d_{\mathrm{I}}\circ d_{\mathrm{I}}=0$ であることは自明であり, $d_{\mathrm{II}}\circ d_{\mathrm{II}}=0$ は石田 [20, Lemma 1.4, Prop. 1.6] により示された. $d_{\mathrm{I}}\circ d_{\mathrm{II}}+d_{\mathrm{II}}\circ d_{\mathrm{I}}=0$ であることが定義から容易に判るので, $\mathcal{O}_X$加群の二重複体 $\mathcal{L}_X^{\cdot,\cdot}$を得る. これをトーリック多様体 Xの**対数的二重複体**と呼ぶことにする. それに付随する $\mathcal{O}_X$加群の (一重) **対数的複体**を $\mathcal{L}_X^{\cdot}$ と書くことにする.

命題 1を, 各$\sigma\in\Delta$に対する埋め込み写像 $j_\sigma:\mathrm{orb}(\sigma)\to X$に適用すれば次の結果を得る.

系 2 qを固定したとき,

$$\left(\mathcal{L}_X^{\cdot,q}\right)^{\mathrm{an}}=\bigoplus_{\sigma\in\Delta(q)}\mathrm{R}(j_\sigma)_*^{\mathrm{an}}\mathbf{C}_{\mathrm{orb}(\sigma)}[-q].$$

簡単のため, 前述のように $\mathcal{X}:=X^{\mathrm{an}}$と書くことにする.

定理 3 扇Δが**単体的**であれば, 擬同型 $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}=(\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}}$が成立する.

証明 Xがアフィンの場合に証明すれば十分であり, 直接証明も比較的容易であるが, 次のようにして一般の Xでも証明できる.

X上の **Zariski 微分形式**の $\mathcal{O}_X$複体$\tilde{\Omega}_X^{\cdot}$を使用する. Xの非特異部分の開埋め込みを $j:U\to X$とすれば,

$$\tilde{\Omega}_X^{\cdot}:=j_*\Omega_U^{\cdot}$$

である. Danilov の Poincaré lemma [7] (石田 [21, Prop. 2.1] も参照) によれば, **任意の**扇Δに対し

$$\mathbf{C}_{\mathcal{X}}=(\tilde{\Omega}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}}\qquad(擬同型)$$

である. 一方, Δが**単体的**扇であるとき, 各p に対して

$$\tilde{\Omega}_X^{p}=\mathcal{L}_X^{p,\cdot}\qquad(擬同型)$$

が成立する ([26, Thm. 3.6] 参照).

単体的とは限らない一般の場合, 次のような驚くべきことが成立する.

定理 4 (石田) 単体的とは限らない**任意の**扇Δに対して, $(\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}}[2r]$ は Verdier の**意味での大域的に正規化された双対化 $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}$複体** $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\cdot}$と擬同型である.

注 **代数的**かつ**連接**な $\mathcal{O}_X$加群を成分とする複体によって表現できることが我々にとって重要である. 類似の結果として, $\mathcal{L}_X^{r,\cdot}[r]$ が**大域的に正規化された双対化** $\mathcal{O}_X$**複体**に擬同型であることも石田 [20, Thm. 3.3] および [21, Thm. 5.4] によって証明された.

2 扇に関する石田のコホモロジー

Δを $N\cong \mathbf{Z}^r$の扇としたとき, 前節と同様に各 $0\leq q\leq r$に対して$\Delta(q):=\{\sigma\in\Delta\mid \dim\sigma=q\}$とする. 整数$0\leq p\leq r$に対し, **石田の Z 複体** $C^{\cdot}(\Delta,\Lambda^p)$ を次のように定義する.

$$C^q(\Delta,\Lambda^p):=\bigoplus_{\sigma\in\Delta(q)}\bigwedge^{p-q}(M\cap\sigma^{\perp}),\qquad\qquad 0\leq q\leq p.$$

コバウンダリー写像

$$\delta: C^q(\Delta,\Lambda^p)=\bigoplus_{\sigma\in\Delta(q)}\bigwedge^{p-q}(M\cap\sigma^{\perp})\longrightarrow C^{q+1}(\Delta,\Lambda^p)=\bigoplus_{\tau\in\Delta(q+1)}\bigwedge^{p-q-1}(M\cap\tau^{\perp})$$

の (σ,τ) 成分は, σがτの面でないとき0, またもし面であれば, ある原始元$n\in N$が$N\cap\mathbf{R}\sigma$を法として唯一つ決り$\tau+(-\sigma)=\mathbf{R}_{\geq 0}n+\mathbf{R}\sigma$と表せる. (σ,τ) 成分はこの n による**内部積**である. すなわち, $m_1\in M\cap\sigma^{\perp}$ および $m_2,\ldots,m_{p-q}\in M\cap\tau^{\perp}$であるような$m_1\wedge m_2\wedge\cdots\wedge m_{p-q}$を$\langle m_1,n\rangle m_2\wedge\cdots\wedge m_{p-q}$に写す. $\delta\circ\delta=0$ であることが容易に判り ([20, Prop. 1.6] 参照), $C^{\cdot}(\Delta,\Lambda^p)$ は Z 複体となる. そのコホモロジー群を $H^{\cdot}(\Delta,\Lambda^p)$ と書き, **石田のコホモロジー群**と呼ぶことにする.

注 定義から明らかなように, $0\leq q\leq p$ 以外では $H^q(\Delta,\Lambda^p)=0$ である. 石田 [20], あるいは $C^{\cdot}(\Delta;p)$ とする [26, §3.2] との表記法の違いに注意されたい.

[27] にあるように, 扇とは限らない**単体的凸多面錐分割** Πおよび各 1 次元錐の marking についても, 類似の R 複体 $C^{\cdot}(\Pi,\mathcal{G}_p)$ が定義できる. しかしながら, 扇の場合のように格子Nが与えられていない場合, **非単体的凸多面錐分割**Πに対しては, たとえ marking を与えてもコバウンダリー写像がうまく定義できないことに注意が肝要である. 上記では, σ, τの形状にかかわりなく, $\tau+(-\sigma)=\mathbf{R}_{\geq 0}n+\mathbf{R}\sigma$となる原始元$n\in N$が$N\cap\mathbf{R}\sigma$を法として唯一つ決ることが決定的である.

石田のコホモロジーに関する次の結果を度々使用する.

命題 5 ([26, Lemma 3.7] および [27, Proposition 3.5] 参照) **単体的有理多面錐**πの**面全体のなす扇**Γ_πおよびすべての$0\leq p\leq r$に対し, 次のことが成り立つ. ただし$M_{\mathbf{Q}}:=M\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$である.

$$H^q(\Gamma_\pi,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=\begin{cases}\bigwedge^p(M_{\mathbf{Q}}\cap\pi^{\perp}) & q=0\\ 0 & q\neq 0.\end{cases}$$

扇Δに対応するトーリック多様体 $X:=T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ の対数的 $\mathcal{O}_X$複体 $\mathcal{L}_X^{\cdot}$の超コホモロジー群を $\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})$ と書く.

定理 6 完備とも単体的とも限らない任意の扇Δ, および各 lに対し, 次のような直和分解が存在する.

$$\mathbf{H}^l(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})=\bigoplus_{p+q=l}H^q(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}.$$

証明　超コホモロジー群$\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})$は，アフィン開被覆$\mathcal{U}:=\{U_\sigma \mid \sigma\in\Delta\}$に関するČech二重複体

$$\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{L}_X^{\cdot})$$

に付随した一重複体のコホモロジー群と一致することが知られている．

$$\sigma_0,\sigma_1\ldots,\sigma_q\in\Delta \quad \text{に対して} \qquad U_{\sigma_0}\cap U_{\sigma_1}\cap\cdots\cap U_{\sigma_q}=U_{\sigma_0\cap\sigma_1\cap\cdots\sigma_q}$$

も成立する．

$\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{L}_X^{\cdot})$には$T_N$が代数的に作用し，指標$m\in M$に関する固有空間分解

$$\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{L}_X^{\cdot})=\bigoplus_{m\in M}\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{L}_X^{\cdot})_m, \qquad \text{従って} \qquad \mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})=\bigoplus_{m\in M}\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})_m$$

を得る．各$m\in M$に対して三重複体を

$$\check{C}_m^{\cdot,\cdot,\cdot}:=\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{L}_X^{\cdot,\cdot})_m \qquad \check{C}_m^{l,p,q}:=\check{C}^{l}(\mathcal{U},\mathcal{L}_X^{p,q})_m$$

と定義する．ただしl, p, qに関する微分は，それぞれ，Čech コバウンダリー$\check{\delta}$のm成分$\check{\delta}_m$，および$\mathcal{L}_X^{\cdot,\cdot}$の微分から導かれるものの$m$成分$(d_{\mathrm{I}})_m$, $(d_{\mathrm{II}})_m$である．

$m\neq 0$のとき，任意のl, qに対し，$(d_{\mathrm{I}})_m$から導かれる列$\check{C}_m^{l,\cdot,q}$が完全であることは，$(d_{\mathrm{I}})_m$が外積$m\wedge$であることから明かである．従って，$m\neq 0$なら$\check{C}_m^{\cdot,\cdot,\cdot}$に付随した一重複体$\check{C}_m^{\cdot}$のコホモロジー群$H^{\cdot}(\check{C}_m^{\cdot})=0$となることが容易に判り，結局

$$\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})=\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})_0,$$

すなわち$\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})$は$T_N$不変となる．

一方，$m=0$のとき，明かに$(d_{\mathrm{I}})_0=0$であるから，$\check{C}_0^{\cdot,\cdot,\cdot}$は，各$p$に対する二重複体$\check{C}_0^{\cdot,p,\cdot}$の直和となる．

さて，一般のトーリック多様体V上の可逆層のコホモロジー群はDemazure-Danilovの方法により計算できる(例えば，[26, Thm. 2.6] 参照)．その特別な場合として，自明な可逆層のコホモロジー群のT_N不変成分に関し

$$H^l(V,\mathcal{O}_V)_0=\begin{cases}\mathbf{C} & l=0\\ 0 & l\neq 0\end{cases}$$

が成り立つ．$\mathcal{L}_X^{p,q}$は$\mathcal{O}_{V(\sigma)}$の形の層の直和であるから，各pに対し，二重複体$\check{C}_0^{\cdot,p,\cdot}$に付随した一重複体のコホモロジー群は，$H^0(X,\mathcal{L}_X^{p,\cdot})_0=C^{\cdot}(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}$のコホモロジー群と一致することになる．従って，求める$\mathbf{H}^{\cdot}(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})_0$は，$H^q(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}$の直和となる．

定理 7 完備とは限らない**単体的**扇Δ，および各lに対し，次が成立する．

$$H^l(\mathcal{X},\mathbf{C})=\mathbf{H}^l(\mathcal{X},(\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}})=\mathbf{H}^l(X,\mathcal{L}_X^{\cdot})=\bigoplus_{p+q=l}H^q(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}.$$

証明 Hodge-Atiyah [19] および Grothendieck [18] による de Rham 複体の場合の証明を真似て行う.

定理3により, 擬同型 $\mathbf{C}_{\mathcal{X}} = (\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}}$がある. 従って, 超コホモロジーに関する一般論により, 解析的にスペクトル列

$$E_1^{p,q} := H^q(\mathcal{X}, (\mathcal{L}_X^p)^{\mathrm{an}}) \Longrightarrow \mathbf{H}^{p+q}(\mathcal{X}, (\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}}) = H^{p+q}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$$

を得る. 一方, 代数的にもスペクトル列

$$E_1^{p,q} := H^q(X, \mathcal{L}_X^p) \Longrightarrow \mathbf{H}^{p+q}(X, \mathcal{L}_X^{\cdot})$$

を得る.

自然な準同型 $\mathbf{H}^{\cdot}(X, \mathcal{L}_X^{\cdot}) \to \mathbf{H}^{\cdot}(\mathcal{X}, (\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}})$ が同型であることを示すためには, Xがアフィンであると仮定しても一般性を失わない. なぜなら, 定理6の証明でも述べた通り, 超コホモロジーは, アフィン開被覆$\mathcal{U} := \{U_\sigma \mid \sigma \in \Delta\}$ に関するČech 二重複体$\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{L}_X^{\cdot})$ に付随した一重複体, およびその解析的類似物, のコホモロジー群として計算できるからである.

アフィンで $X = U_\pi := \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[M \cap \pi^\vee])$ の形をしているとき, Danilov [7, Lemma 12.3] により

$$H^p(\mathcal{X}, \mathbf{C}) = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \bigwedge^p (M \cap \pi^\perp).$$

一方, 今の場合$\Delta = \Gamma_\pi$であるから, 命題5により, この式の右辺は $H^0(\Delta, \Lambda^p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ と等しく, また$q \neq 0$ なら $H^q(\Delta, \Lambda^p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} = 0$ である. 従って, 定理6により証明が完了する.

注 完備かつ単体的な場合の代数幾何学的証明は Danilov [7] および [26, Thm. 3.11] にある.

注 Δを, 単体的とは限らない任意の扇としたとき, Verdier の双対定理および石田の定理4により, すべての整数lに対して

$$\mathbf{H}^l(\mathcal{X}, (\mathcal{L}^{\cdot})^{\mathrm{an}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H_c^{2r-l}(\mathcal{X}, \mathbf{C}), \mathbf{C})$$

である. ただし, 右辺はコンパクトな台を持つコホモロジー群の双対 $\mathbf{C}$ ベクトル空間である. 一方, 定理6により, 直和分解

$$\mathbf{H}^l(X, \mathcal{L}_X^{\cdot}) = \bigoplus_{p+q=l} H^q(\Delta, \Lambda^p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$$

が存在する. もし単体的とは限らないπに対し, $\Delta = \Gamma_\pi$従って $X = U_\pi$となるアフィンの場合に, 自然な直和分解

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H_c^{2r-l}((U_\pi)^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}), \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=l} H^q(\Gamma_\pi, \Lambda^p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$$

の存在が示せれば, 定理7が任意の扇, および各lに対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H_c^{2r-l}(\mathcal{X}, \mathbf{C}), \mathbf{C}) = \mathbf{H}^l(\mathcal{X}, (\mathcal{L}_X^{\cdot})^{\mathrm{an}}) = \mathbf{H}^l(X, \mathcal{L}_X^{\cdot}) = \bigoplus_{p+q=l} H^q(\Delta, \Lambda^p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$$

という形に一般化できることになる.

定理7により, 石田のコホモロジー群の計算が重要と判明したが, それに関しては命題5以外に, 次のことも判っている. まず$p=r$の場合には, 次の補題のおかげで単体性の仮定が不要となる.

補題 8 (石田 [20, Prop. 2.3] および [26, p. 120, Remark] 参照) $p=r$のとき, 各qに対して, $H^q(\Delta,\Lambda^r)$ は, 球面 $(N_{\mathbf{R}}\setminus\{0\})/\mathbf{R}_{>0}$の部分集合$(|\Delta|\setminus\{0\})/\mathbf{R}_{>0}$の被約コホモロジー群$\widetilde{H}^{q-1}(((|\Delta|\setminus\{0\})/\mathbf{R}_{>0}),\mathbf{Z})$ と一致する. ただし, $\mathbf{R}_{>0}$は正の実数のなす乗法群である.

系 9 $p=r$のとき, 任意の完備な扇Δおよびすべての$q\neq r$に対し, $H^q(\Delta,\Lambda^r)=0$ が成り立つ.

系 10 (石田 [20, Prop. 2.3]. [26, Lemma 3.8] も参照) 有理強凸多面錐πの面全体のなす扇をΓ_πとすれば, $p=r$に対し, $q=0$ かつ$\pi=\{0\}$ の場合以外には $H^q(\Gamma_\pi,\Lambda^r)=0$ である.

一般の $0\le p\le r$の場合, 単体的なら次のように基本的な結果を示すことができる.

定理 11 (消滅定理)　完備とは限らない単体的扇Δの台 $|\Delta|$ がr次元でありかつ凸多面錐であれば,

$$q\neq p\text{なら}\qquad H^q(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=0,$$

が成立する. 従って, $\mathcal{X}:=X^{\mathrm{an}}$, $X:=T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ に対して

$$H^l(\mathcal{X},\mathbf{C})=\begin{cases}H^{l/2}(\Delta,\Lambda^{l/2})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C} & l\ \text{偶数}\\ 0 & l\ \text{奇数}.\end{cases}$$

尚, 石田正典氏によれば, もう少し条件を緩めても上記の消滅定理が成立する.

系 12 ([26, Thm. 3.11], [27, Thm. 4.1] 参照) 単体的かつ完備な扇Δおよびすべての$0\le p\le r$に対して,

$$q\neq p\text{ なら}\qquad H^q(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=0$$

が成立する. 従って, $\mathcal{X}:=X^{\mathrm{an}}$, $X:=T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ に対して

$$H^l(\mathcal{X},\mathbf{C})=\begin{cases}H^{l/2}(\Delta,\Lambda^{l/2})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C} & l\ \text{偶数}\\ 0 & l\ \text{奇数}.\end{cases}$$

注　[27, Theorem 4.3] の証明の類似を使うと, 更に次のことも示せる. πを単体的とは限らないr次元有理強凸多面錐とする. πの自分自身以外の面全体のなす扇を$\Delta:=\Gamma_\pi\setminus\{\pi\}$とする. もしこの$\Delta$が単体的であれば,

$$H^q(\Delta,\Lambda^p)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=0,\qquad\qquad q\neq p-1,p.$$

3　交叉複体

$\mathbf{C}$ 上の一般の r次元正規代数多様体 Xに対応する複素解析空間も前述の通り $\mathcal{X} := X^{\mathrm{an}}$ と書くことにする．簡単のため，$\mathbf{C}_{\mathcal{X}}$上の交叉複体のみを考察する．基本的文献 Goresky-MacPherson[15], [17], [16], Deligne [11], Beilinson-Bernstein-Deligne [1], Borel et al. [4], Brylinski [6], Kirwan [24] 等で慣習がまちまちであるが，ここでは middle perversity に対応する**交叉 $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}$ 複体** $\mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}}$として，そのコホモロジー層が

$$-2r \leq l \leq 0 \text{ でなければ} \qquad \mathcal{H}^l(\mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}}) = 0$$

を満たすものを選ぶことにする．従って，$\mathcal{X}$の**交叉コホモロジー群**は超コホモロジーにより

$$IH^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C}) := \mathbf{H}^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}}[-2r])$$

と表せる．

zero perversity に対応する交叉複体は $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}[2r]$ と擬同型であり，一方 top perversity に対応する交叉複体は，Verdier の意味での大域的に正規化された双対化 $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}$複体 $\mathcal{D}^{\cdot}_{\mathcal{X}}$ に擬同型であることが知られている．

定理 3により，次が判る．高々商特異点しか持たない多様体の混合 Hodge 構造が非特異な場合と本質的に同じであるとする Steenbrink [35] の結果の特別な場合である．

系 13 扇Δが単体的であれば，

$$\mathbf{C}_{\mathcal{X}}[2r] = \mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}} = \mathcal{D}^{\cdot}_{\mathcal{X}} = \left(\tilde{\Omega}^{\cdot}_X\right)^{\mathrm{an}}[2r] = \left(\mathcal{L}^{\cdot}_X\right)^{\mathrm{an}}[2r] \qquad (\text{擬同型})$$

が成立する．特に，$H^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C}) = IH^{\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H_c^{2r-\cdot}(\mathcal{X}, \mathbf{C}), \mathbf{C})$.

非常に簡単な代数的連接 $\mathcal{O}_X$加群を成分とする複体で$\mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}}$を表現できることが我々にとって重要である．

4　孤立非商特異点の交叉コホモロジー

単体的でない最も簡単な場合を考える．

πを $N_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}^r$内の r**次元**有理強凸多面錐であって，π自身は単体的ではないがπの**自分自身以外のすべての面は単体的**であると仮定する．このとき orb(π) は一点となり，$U_\pi := \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[M \cap \pi^\vee])$ の商特異点ではない孤立特異点である．

πの**微小な単体的細分**となる扇Δ'をひとつ選び固定する．すなわち，

(i) Δ'は単体的扇．

(ii) $|\Delta'| = \pi$.

(iii) π自身以外のπの面はすべてΔ'に属する．

(iv) $\sigma' \in \Delta'$がπの内部と交われば $\dim \sigma' > r/2$.

Gelfand-Kapranov-Zelevinskij 分割に関する結果の副産物 ([29] 参照) によれば, (i), (ii), (iii) を満たし更に

(v) Δ'の 1 次元面の全体$\Delta'(1)$ がπの 1 次元面の全体$\Gamma_\pi(1)$ と一致. (すなわち, πの内部と交わる$\sigma' \in \Delta'$は $\dim\sigma' > 1$.)

を満たす細分Δ'が必ず存在し, しかも (少なくとも準射影的なものに限定すれば) 相異なるものは有限回の flop の合成で互いに移りうることが判っている. それらの内で, (iv) を満たすものが存在するか否か, および存在するときのそれらの間の関係, については今のところ不明である.

(i), (ii), (iii), (iv) を満たす細分Δ' に対応する同変正則写像

$$\varphi : X' := T_N\,\mathrm{emb}(\Delta') \longrightarrow U_\pi$$

は微小な双有理写像である (Goresky-MacPherson [17, §6.2] 参照). すなわち, 点 $\mathrm{orb}(\pi)$ 上のφ のファイバーは

$$\dim_{\mathbf{C}} \varphi^{-1}(\mathrm{orb}(\pi)) < \frac{r}{2}$$

を満たし, 一方 $U_\pi \setminus \{\mathrm{orb}(\pi)\}$ 上ではφ は同型である.

Xに対応する複素解析空間を $\mathcal{X}' := (X')^{\mathrm{an}}$とすれば, Δ'が単体的であることから, 定理 3 により擬同型

$$\mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}'} = \mathbf{C}_{\mathcal{X}'}[2r] = \left(\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}}[2r]$$

を得る.

φ が微小であることから, Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber の decomposition theorem ([1], [16], [17], [24] 等参照) によって, 擬同型

$$\mathcal{IC}^{\cdot}_{(U_\pi)^{\mathrm{an}}} = \mathbf{R}\varphi^{\mathrm{an}}_* \mathcal{IC}^{\cdot}_{\mathcal{X}'} = \mathbf{R}\varphi^{\mathrm{an}}_* \mathbf{C}_{\mathcal{X}'}[2r] = \mathbf{R}\varphi^{\mathrm{an}}_* \left(\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}}[2r] = \left(\mathbf{R}\varphi_* \mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}}[2r]$$

を得る. 最後の等式は, 超順像 $\mathbf{R}\varphi_*$と順像 $R\varphi_*$に関するスペクトル列, および固有写像φ に関する GAGA の定理から判る. 特に, $IH^{\cdot}((U_\pi)^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) = H^{\cdot}(\mathcal{X}', \mathbf{C})$ である.

Deligne による $\mathcal{IC}^{\cdot}_{(U_\pi)^{\mathrm{an}}}$の特徴付けにより次の (1), (2), (3), (4) が成立する.

(1) $(\mathbf{R}\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})^{\mathrm{an}}$は擬同型を除き, 微小な単体的細分$\Delta'$の選び方によらない.

(2) $(U_\pi \setminus \{\mathrm{orb}(\pi)\})^{\mathrm{an}}$上では $(\mathbf{R}\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})^{\mathrm{an}}$は $\mathbf{C}_{\mathcal{X}'}$と擬同型である. φ が $U_\pi \setminus \mathrm{orb}(\pi)$ 上同型であるからこれは明らかである.

(3) $(\mathbf{R}\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})^{\mathrm{an}}$は自己双対, すなわち $\mathbf{R}\,\mathcal{H}om^{\cdot}_{\mathbf{C}_{(U_\pi)^{\mathrm{an}}}}((\mathbf{R}\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})^{\mathrm{an}}[2r], \mathcal{D}^{\cdot}_{(U_\pi)^{\mathrm{an}}})$ と擬同型である. これは, 固有写像φ に対する Verdier の双対定理から別途証明できる. 石田 [21, Prop. 2.5] は, この事実のもっと直接的な証明と見なすことができる.

(4) $(\mathbf{R}\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})^{\mathrm{an}}$のコホモロジー層

$$R^l\varphi^{\mathrm{an}}_*\mathbf{C}_{\mathcal{X}'} = \mathbf{R}^l\varphi^{\mathrm{an}}_*\left(\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}} = \mathcal{H}^l\left(\left(\mathbf{R}\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}}\right) = \left(\mathbf{R}^l\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}} = \mathcal{H}^l\left(\left(\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}}\right)$$

の台に関して

$$l > 0 \text{ なら } \qquad \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{supp}\left(\mathrm{R}^l\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}\right)^{\mathrm{an}} < r - l$$

が成立する. 特に, $l \geq r$ なら $\mathrm{R}^l\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'} = 0$ である.

上記の (4) 中の最後の同型は, 次の補題による.

補題 14 (石田 [21, Cor. 3.3]) 扇Δ'が扇Δの細分であるとする. $\sigma' \in \Delta'$に対応する X'の軌道の閉包を $V'(\sigma')$ とすれば, σ'を含む最小の$\sigma \in \Delta$に対して, 擬同型

$$\mathrm{R}\varphi_*\mathcal{O}_{V'(\sigma')} = \mathcal{O}_{V(\sigma)}$$

が成立する.

我々の今の場合, $\Delta = \Gamma_\pi$であり, 従って,

$$\sigma = \begin{cases} \sigma' & \sigma' \text{が}\pi\text{の内部と交わらない時} \\ \pi & \sigma' \text{が}\pi\text{の内部と交わる時.} \end{cases}$$

(4′)　上記の (4) は

$$p \geq r/2 \text{ なら } \qquad H^p(\Delta', \Lambda^p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} = 0$$

と同値である. 実際, スペクトル列

$$E_2^{k,l} := H^k((U_\pi)^{\mathrm{an}}, R^l\varphi_*^{\mathrm{an}}\mathbf{C}_{\mathcal{X}'}) \Longrightarrow H^{k+l}(\mathcal{X}', \mathbf{C})$$

において, $\varphi_*^{\mathrm{an}}\mathbf{C}_{\mathcal{X}'} = \mathcal{H}^0((\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})^{\mathrm{an}}) = \mathbf{C}_{(U_\pi)^{\mathrm{an}}}$ である. 仮定により$\pi^\perp = \{0\}$ であるから, 再び Danilov [7, Lemma 12.3] により, $k > 0$ なら $E_2^{k,0} = H^k((U_\pi)^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}_{(U_\pi)^{\mathrm{an}}}) = 0$ となる. 一方 $l > 0$ なら, $R^l\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'}$は $U_\pi \setminus \mathrm{orb}(\pi)$ 上で 0 となり, 従って $\operatorname{supp}(R^l\varphi_*\mathcal{L}^{\cdot}_{X'})$ は一点集合 $\{\mathrm{orb}(\pi)\}$ に含まれることになり, $k > 0$, $l > 0$ なら $E_2^{k,l} = 0$. よって, $|\Delta'| = \pi$を満たすΔ'に定理 11を適用すれば,

$$E_2^{0,l} = H^0((U_\pi)^{\mathrm{an}}, R^l\varphi_*^{\mathrm{an}}\mathbf{C}_{\mathcal{X}'}) = H^l(\mathcal{X}', \mathbf{C}) = \begin{cases} H^{l/2}(\Delta', \Lambda^{l/2}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} & l\text{偶数} \\ 0 & l\text{奇数.} \end{cases}$$

注　(4′) は, 既知である次の結果とも同値である.

$$IH^l((U_\pi)^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) = \begin{cases} H^l((U_\pi \setminus \{\mathrm{orb}(\pi)\})^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) & l < r \\ 0 & l \geq r. \end{cases}$$

従って, πの微小な単体的細分Δ'の存在, (1) および (4′) を別途証明できれば, decomposition theorem を使用せずに $(U_\pi)^{\mathrm{an}}$の交叉複体が記述でき, 交叉コホモロジー群が

$$IH^l((U_\pi)^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) = \begin{cases} H^{l/2}(\Delta', \Lambda^{l/2}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} & l\text{偶数}, l < r \\ 0 & \text{その他の } l \end{cases}$$

と記述できることになる.

参考文献

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux pervers, in *Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers* (I), Astérisque 100, Soc. Math. France, 1982.

[2] L. J. Billera and C. W. Lee, Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.) 2 (1980), 181–185.

[3] L. J. Billera and C. W. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, J. Combin. Theory (A) 31 (1981), 237–255.

[4] A. Borel et al., *Intersection Cohomology*, Progress in Math. 50, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1984.

[5] A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. 2, Academic Press, Boston, Orlando, San Diego, New York, Austin, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1987.

[6] J.-L. Brylinski, (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki, exp. 585, February, 1982.

[7] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (1978), 97–154; Uspehi Mat. Nauk 33 (1978), 85–134.

[8] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[9] P. Deligne, Théorie de Hodge, II, Publ. Math. I. H. E. S. 40 (1971), 5–57.

[10] P. Deligne, La conjecture de Weil, II, Publ. Math. I. H. E. S. 52 (1980), 137–252.

[11] P. Deligne, Pureté de la cohomologie de MacPherson-Goresky, d'aprè un exposé de O. Gabber, preprint, Inst. Hautes Etudes Scientifiques, 1981.

[12] J. Denef and F. Loeser, Weights of exponential sums, intersection cohomology, and Newton polyhedra, preprint.

[13] K.-H. Fieseler, Rational intersection cohomology of projective toric varieties, preprint.

[14] J. Fine and P. Rao, On intersection homology at isolated singularities, in *Algebras, Groups and Geometries*, to appear.

[15] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology theory, Topology 19 (1980), 135–162.

[16] M. Goresky and R. MacPherson, On the topology of complex algebraic maps, in *Algebraic Geometry—Proceedings, La Rabida*, Lecture Notes in Math. 961, Springer-Verlag, 1982, 119–129.

[17] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II, Invent. Math. 72 (1983), 77–129.

[18] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. I. H. E. S. 29 (1966), 95–103.

[19] W. V. D. Hodge and M. F. Atiyah, Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math. 62 (1955), 56–91.

[20] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. 32 (1980) 111–146.

[21] M.-N. Ishida, Torus embeddings and de Rham complexes, in *Commutative Algebra and Combinatorics* (M. Nagata and H. Matsumura, eds.,), Advanced Studies in Pure Math. 11, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 111–145.

[22] R. Joshua, Vanishing of odd-dimensional intersection cohomology, Math. Z. 195 (1987), 239–253.

[23] R. Joshua, Equivariant intersection cohomology—a survey, in *Invariant Theory, Proc. of AMS Special Session, October 31–November 1, 1986*, Contemporary Math. 88, Amer. Math. Soc., 1989, 25–31.

[24] F. Kirwan, *An Introduction to Intersection Homology Theory* , Pitman Research Notes in Math. 187, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, UK and John Wiley & Sons, New York, 1988.

[25] P. McMullen, The number of faces of simplicial polytopes, Israel J. Math. 9 (1971) 559–570.

[26] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry—An Intorudction to the Theory of Toric Varieties*, Ergebnisse der Math. (3) 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.

[27] T. Oda, Simple convex polytopes and the strong Lefschetz theorem, a special issue of J. Pure Appl. Algebra dedicated to the sixtieth birthday of Professor Hideyuki Matsumura (T. Hibi and J. D. Sally, eds.), to appear.

[28] T. Oda, Geometry of toric varieties, in *Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups, December, 1989*, (S. Ramanan, ed.), Manoj Prakashan, Madras, India, to appear.

[29] , T. Oda and H. S. Park, Linear Gale transforms and Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions, Tohoku Math. J., to appear.

[30] 小田忠雄, 単体的凸多面体と Lefschetz の強定理, 1989 代数幾何学シンポジューム記録 (1990 年 1 月, 城崎大会議館).

[31] M. Saito, Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes, Bull. Soc. Math. France 117 (1989), 361–387.

[32] M. Saito, Mixed Hodge modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 26 (1990), 221–333.

[33] R. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. in Math. 35 (1980), 236–238.

[34] R. Stanley, Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results, in *Commutative Algebra and Combinatorics* (M. Nagata and H. Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math. 11, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 187–213.

[35] J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, in *Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, Proc. of the Nordic Summer School/NAVF, Symp. in Math. Oslo, August 5–25, 1976* (P. Holm, ed.), Sijthof & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, 525–563.

[36] J.-L. Verdier, Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, Séminaire Bourbaki 1965/66, exp. 300.

(1990 年 11 月 29 日作成)